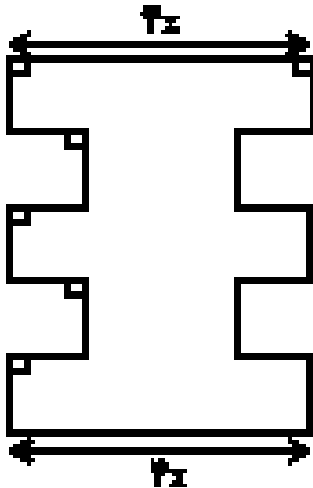




①

در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر اندازه محیط آن باشد، مقدار x کدام است؟



②

در مستطیلی که طول آن ۳ برابر عرض آن است، طول قطر $2\sqrt{10}$ است، در این صورت محیط آن کدام است؟

③

مجموع چهار عدد مضرب ۷ متوالی برابر ۱۵۴ است. کوچکترین عدد کدام است؟

④

اگر از چهار برابر عددی ۲ واحد کم شود، سپس به حاصل، ثلث همان عدد اضافه شود، جواب برابر ۲۰ می‌شود. عدد مورد نظر کدام است؟

⑤

سن دو برادر مجموعاً ۲۰ سال می‌باشد، اگر سن برادر کوچکتر از ۳ برابر سن دیگری ۴ سال کمتر باشد، حاصل ضرب سن آنها کدام است؟

⑥

زهرا از برادرش ۱۰ سال بزرگتر است، ۸ سال بعد سن زهرا دو برابر سن برادرش می‌شود، در حال حاضر زهرا چند سال دارد؟

⑦

در یک قلک تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی $1/5$ برابر تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی است. اگر مجموع پول قلک ۱۶۰۰۰۰ تومان باشد، تعداد کل اسکناس‌های داخل قلک چند تاست؟

⑧

حمید مجموعاً سیزده سکه ۲، ۵ و ۱۰ ریالی به ارزش ۶۷ ریال دارد. اگر تعداد سکه‌های ۲ ریالی دو برابر تعداد سکه‌های ۵ ریالی باشد، تعداد سکه‌های ۱۰ ریالی او چند تاست؟

۹

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

مجموع ثلث، ربع و خمس یک عدد، ۲۶ واحد از آن عدد کمتر است. این عدد کدام است؟

بارم: ۱

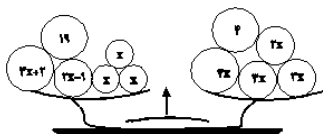
۱۰

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

در ترازوی شکل زیر اگر حاصل کفه سمت چپ دو برابر حاصل کفه سمت راست باشد، در این صورت حاصل کفه سمت راست کدام است؟

بارم: ۱



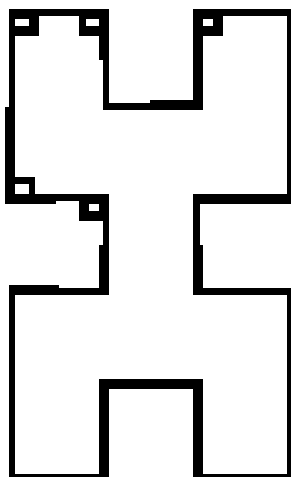
۱۱

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌های کوچک x و پاره‌خط‌های بزرگ $2x$ می‌باشد و پاره‌خط‌های مجاور یکدیگر عمود می‌باشند. اگر اندازه محیط شکل برابر اندازه مساحت آن باشد، مقدار x کدام است؟ ($x \neq 0$)

بارم: ۱



۱۲

تشریحی ۱۳۹۵

متوسط

اگر به دو برابر یک سوم عددی ۵ واحد اضافه کنیم، برابر با نصف آن عدد منهای یک است. آن عدد کدام است؟

بارم: ۱

۱۳

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

سن حمید از دو برابر سن خواهرش چهار سال کمتر است. اگر پنج سال دیگر سن خواهرش $\frac{8}{5}$ سن حمید باشد، در حال حاضر مجموع سن آن‌ها کدام است؟

بارم: ۱

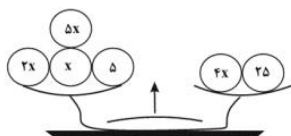
۱۴

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

اگر در شکل زیر طرف چپ ترازو برابر طرف راست آن باشد، در این صورت حاصل هر کفه کدام است؟

بارم: ۱



۱۵

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

در یک کارخانه، حقوق یک مهندس یک و نیم برابر حقوق فن‌ورز و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. این قسمت ۳ مهندس، ۶ فن‌ورز و ۲ مدیر دارد. اگر مدیر عامل ۴۵ میلیون تومان حقوق برای این بخش بپردازد، حقوق فن‌ورز چند میلیون تومان است؟

بارم: ۱

۱۶

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

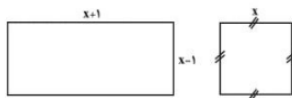
۱۶ سال دیگر سن علی از سه برابر سن کنونی‌اش ۶ سال کمتر است، چند سال دیگر علی ۲۰ ساله می‌شود؟

بارم: ۱

(۱۷)

اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع کوچکتر مستطیل کدام است؟

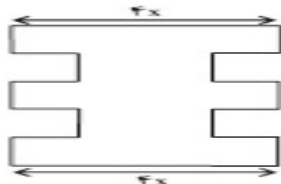
بارم: ۱



(۱۸)

در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دوپاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر اندازه محیط آن باشد، مقدار x کدام است؟ ($x \neq 0$)

بارم: ۱



(۱۹)

در یک مدرسه، تعداد دانش‌آموزان دهم تجربی ۳ نفر بیشتر از دانش‌آموزان دهم انسانی بوده و تعداد دانش‌آموزان دهم انسانی و دهم ریاضی برابر است. اگر ثلث دانش‌آموزان ریاضی و ۳ نفر از دانش‌آموزان انسانی در این پایه به رشته تجربی تغییر رشته دهند، در حالت جدید، ربع دانش‌آموزان دهمی، در رشته انسانی خواهند بود. این مدرسه چند دانش‌آموز مقطع دهم دارد؟

(۲۰)

محیط مستطیلی ۵۴ سانتی‌متر است. اگر طول مستطیل از ۲ برابر عرض آن ۳ سانتی‌متر کمتر باشد، در این صورت مساحت مستطیل برحسب سانتی‌متر مربع کدام است؟

بارم: ۱

(۲۱)

مجموع ریشه‌های معادله $(2x - 3)^2 = 16x^2$ کدام است؟

بارم: ۱

(۲۲)

اگر معادله $x^2 + ax + b = 0$ دارای ریشه مضاعف ۲ باشد، a کدام است؟

بارم: ۱

(۲۳)

اگر عدد مساحت یک مربع از عدد محیط آن ۲۱ واحد بیش‌تر باشد، در این صورت طول قطر مربع کدام است؟

بارم: ۲

(۲۴)

معادله $3x^2 - 5x + 2 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

بارم: ۱

(۲۵)

یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 6ax + 8a = 0$ نصف ریشه دیگر است. a کدام است؟

بارم: ۱

(۲۶)

اختلاف جواب‌های معادله $(7 - 3x)^2 = 16$ کدام است؟

بارم: ۲

(۲۷)

معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که $x = 3$ و $x = -\frac{1}{3}$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

(۲۸)

معادلات زیر را به روش های خواسته شده حل کنید.

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

بارم: ۲

(الف) $3x^2 - 9x = 4$ (روش مربع کامل)

(ب) $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$ (روش کلی)

(۲۹)

معادله $(x-2)^2 = k - 2$ دارای ریشه مضاعف است، مقدار k کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

(۳۰)

(الف) ریشه های معادله $(27x-2)^2 = (13x+22)^2$ را به دست آورید.

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

بارم: ۲.۲۵

(ب) در حل معادله $2x^2 + 5x - 12 = 0$ به روش مربع کامل:

(۱) چه عددی را به طرفین معادله باید اضافه کنیم؟

(۲) از چه عددی جذر گرفته می شود؟

(۳) ریشه های معادله را به دست آورید.

(۳۱)

معادله ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن ۳- و ۵ باشد و ضریب x در آن ۴ باشد.

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

بارم: ۱

(۳۲)

اگر معادله $2x^2 - 4x - 1 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنیم، معادله به شکل $(x-a)^2 = b$ درمی آید، در این صورت $a-b$ کدام بارم: ۱ است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

(۳۳)

جواب بزرگتر معادله ی $2x^2 + 8x + \frac{15}{4} = 0$ چه مقدار از جواب کوچکتر معادله ی $\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} - 1 = 0$ بزرگتر است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۵

بارم: ۱

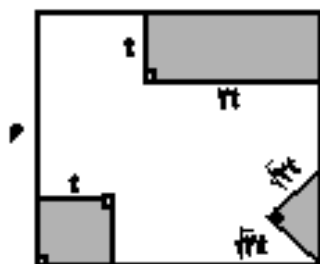
(۳۴)

از مربعی به ضلع 6cm سه قسمت رنگی زیر بریده شده و مساحت باقی مانده 24cm^2 است. t کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱



(۳۵)

(الف) اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $3x^2 - 5x - 4 = 0$ باشند، در این صورت حاصل مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را بدون محاسبه ریشه ها به دست آورید.

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

بارم: ۲

(ب) اگر $x = 2$ یکی از ریشه های معادله $3x^2 + 4x - b = 0$ باشد:(۱) مقدار b را به دست آورید.

(۲) ریشه دیگر این معادله را به دست آورید.

(۳۶)

اختلاف ریشه‌های معادله $35x^2 - 150x + 115 = 0$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۳۷)

اگر معادله $(x+2)^2 = k-3$ ریشه مضاعف داشته باشد، دلتای (Δ) معادله $(x-1)^2 = k+1$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

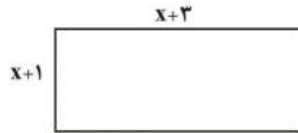
(۳۸)

الف) معادله $3x^2 + 4x + 1 = 0$ را به روش Δ حل کنید.ب) اگر مساحت مستطیل زیر برابر ۱۵ باشد، مقدار x را به دست آورید.

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

بارم: ۲



متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۳۹)

دلتای (Δ) معادله $3x^2 + 4x + 6 = 0$ کدام است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

(۴۰)

اختلاف ریشه‌های معادله $15x^2 + 28x + 13 = 0$ کدام است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

(۴۱)

اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ ، آن‌گاه $f(2 + \sqrt{7}) - f(2)$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۴۲)

جواب معادله $2x - 1 + \frac{1}{2x+1} = 2x - \frac{1}{2}$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۴۳)

جواب کوچکتر معادله $9x^2 - 9x - 10 = 0$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

بارم: ۱

(۴۴)

به‌ازای کدام مقدار b ، $x=1$ ریشه‌ی معادله‌ی زیر می‌باشد؟

$$\frac{x^2 - 8}{x + 12} = \frac{x - 3}{x + 4} + \frac{bx^2}{x + 3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

بارم: ۱

(۴۵)

اگر $x=3$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $\frac{a+3}{2x+3} = \frac{x+1}{3}$ باشد، در این صورت مقدار a کدام است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

(۴۶)

استخری به طول ۴۰ متر موجود است. امیر طول استخر را ۲۰ ثانیه زودتر از علی شنا می‌کند. اگر آنها از دو طرف استخر به سمت یکدیگر شنا کنند، پس از ۲۴ ثانیه به همدیگر می‌رسند. سرعت علی چند متر بر ثانیه است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

(۴۷)

تعداد جواب‌های معادله $2 = \frac{10}{x-3} - \frac{5x-5}{x-3}$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱

(۴۸)

جواب معادله $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-5}{x+6}$ کدام است؟

(۴۹)

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

جواب معادله $\frac{x-2}{x-3} = \frac{x+1}{x+2}$ کدام است؟

بارم: ۱

(۵۰)

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می‌کند و اگر دو شیر را با هم باز کنیم، استخر در ۱۲ ساعت پر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

(۵۱)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

تفاضل معکوس عددی، از ۳ برابر آن عدد، برابر است با مجموع آن عدد و معکوس آن عدد. مربع این عدد کدام است؟

بارم: ۱

(۵۲)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x-a}{x-4} + \frac{8}{x^2} = -6$ دارای جواب $x=2$ است؟

بارم: ۱

(۵۳)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

دو شیر A و B به یک استخر متصل‌اند. وقتی یک شیر به تنهایی باز باشد، شیر A استخر را ۶ ساعت زودتر از شیر B پر می‌کند؛ چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۴ ساعت پر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

(۵۴)

تشریحی ۱۳۹۵ دشوار

مجموع دو عدد که معکوس یکدیگرند $\frac{13}{6}$ می‌باشد، قدرمطلق اختلاف دو عدد کدام است؟

بارم: ۱

(۵۵)

تشریحی ۱۳۹۵ دشوار

دو کارگر وقتی با هم کار می‌کنند، کاری را در ۱۲ روز انجام می‌دهند. ولی اگر به تنهایی کار می‌کردند نفر اول ۱۰ روز زودتر از نفر دوم کار را تمام می‌کرد. کارگر دوم به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کند؟

(۵۶)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷ دشوار

الف) جواب معادله $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-5}{x+6}$ را به دست آورید.

بارم: ۱.۵

ب) به ازای چه مقدار a معادله $\frac{x+1}{x-5} + \frac{ax+3}{9x+2} = 6$ دارای جواب $x=2$ است؟

(۵۷)

تشریحی ۱۳۹۵ دشوار

مجموع ریشه‌های معادله ی زیر کدام است؟

بارم: ۱

$$\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{x^2}$$

(۵۸)

تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

جواب معادله $\frac{x-3}{x-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{8}$ کدام است؟

بارم: ۱

(۵۹)

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

وقتی دو چاپگر با هم کار کنند فیش حقوق کارمندان در $\frac{6}{5}$ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی کار کند فیش ۱۰ ساعت دیرتر از وقتی چاپ می‌شود که چاپگر جدیدتر به تنهایی کار کند. چاپگر جدیدتر به تنهایی در چند ساعت، فیش‌ها را چاپ می‌کند؟

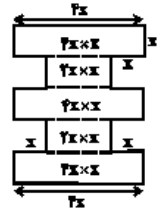
(۶۰)

تشریحی ۱۳۹۵ متوسط

اگر $x=3$ یکی از جواب‌های معادله ی $\frac{a+3}{2x+3} = \frac{x+1}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

بارم: ۱

ابتدا اندازه مساحت و محیط شکل را جداگانه می‌یابیم:



$$\text{مساحت شکل} = 4x \times x + 2x \times x + 4x \times x + 2x \times x + 4x \times x$$

$$\text{مساحت شکل} = 4x^2 + 2x^2 + 4x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 16x^2$$

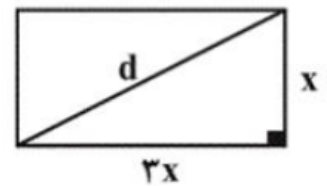
$$\text{محیط شکل} = 4x + 4x + 4x + 4x = 16x$$

محیط شکل = مساحت شکل

$$\Rightarrow 16x^2 = 16x \Rightarrow 16x^2 - 16x = 0$$

$$\Rightarrow x(16x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق} \\ 16x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{16} = 1 \end{cases}$$

اگر عرض مستطیل را x در نظر بگیریم، در این صورت طول آن $3x$ خواهد بود، با توجه به شکل زیر طول قطر مستطیل با استفاده از رابطه فیثاغورس برابر است با:

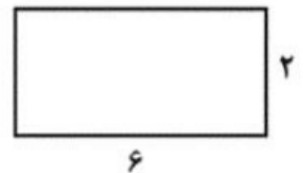


$$\text{طول قطر مستطیل: } d^2 = (3x)^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 9x^2 + x^2 = 10x^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{10} \quad x \xrightarrow{d=2\sqrt{10}}$$

$$2\sqrt{10} = \sqrt{10} \quad x \Rightarrow x = 2$$

پس مستطیل به صورت زیر است:



$$\text{محیط مستطیل} = 2 \times (2 + 6) = 2 \times 8 = 16$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳

عدد کوچکتر را x فرض می‌کنیم در این صورت اعداد دیگر به ترتیب $x + 7$ ، $x + 14$ و $x + 21$ هستند، در این صورت داریم:

$$x + x + 7 + x + 14 + x + 21 = 154$$

$$\Rightarrow 4x + 42 = 154 \Rightarrow 4x = 154 - 42$$

$$\Rightarrow 4x = 112 \Rightarrow x = \frac{112}{4} = 28$$

پس کوچکترین عدد برابر ۲۸ است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴

اگر عدد مورد نظر را x فرض کنیم، با توجه به اطلاعات مسأله چنین می‌نویسیم:

$$4x - 2 + \frac{x}{3} = 20 \xrightarrow{\times 3} 12x - 6 + x = 60$$

$$\Rightarrow 13x = 66 \Rightarrow x = \frac{66}{13} = 5\frac{1}{13}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵

سن برادر کوچکتر را x فرض می‌کنیم، پس:

$$x + (3x - 4) = 20$$

$$4x = 20 + 4 \Rightarrow x = \frac{24}{4} = 6 \text{ سن برادر کوچک}$$

$$\text{سن برادر بزرگتر} = 3 \times 6 - 4 = 14$$

$$\text{حاصل ضرب سن آنها} = 6 \times 14 = 84$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶

اگر سن زهرا را x و سن برادرش را y فرض کنیم داریم:

$$x - y = 10 \quad (1)$$

۸ سال بعد سن زهرا $x + 8$ و سن برادرش $y + 8$ می‌شود، آنگاه داریم:

$$x + 8 = 2(y + 8) \Rightarrow x + 8 = 2y + 16 \Rightarrow x = 2y + 8 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} 2y + 8 - y = 10 \Rightarrow y = 2$$

$$\xrightarrow{(1)} x - 2 = 10 \Rightarrow x = 12$$

فرض می‌کنیم تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی برابر x باشد، در این صورت تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی برابر $1/5x$ می‌باشد، در این صورت مجموع پول کلک برابر است با:

$$x \times 5000 + 1/5x \times 2000 = 160000$$

$$\Rightarrow 5000x + 400x = 160000 \Rightarrow 5400x = 160000$$

$$\Rightarrow x = 20$$

حال تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی برابر است با:

$$\text{تعداد اسکناس } 2000 = 1/5 \times 20 = 4$$

$$\text{تعداد کل اسکناس‌ها} = 4 + 20 = 24$$

تعداد سکه‌های ۵ ریالی را x در نظر می‌گیریم. تعداد سکه‌های ۲ ریالی برابر با $2x$ می‌شود. از آنجا که مجموعاً ۱۳ سکه دارد، تعداد سکه‌های ۱۰ ریالی برابر است با:

$$13 - 3x$$

ارزش سکه‌های حمید ۶۷ ریال است:

$$5x + 2(2x) + 10(13 - 3x) = 67$$

$$\Rightarrow 5x + 4x + 130 - 30x = 67 \Rightarrow -21x + 130 = 67$$

$$\Rightarrow 21x = 63 \Rightarrow x = 3$$

تعداد سکه‌های ۵ ریالی ۳ تا و تعداد سکه‌های ۲ ریالی ۶ تا است.

تعداد سکه‌های ۱۰ ریالی:

$$13 - 9 = 4$$

عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم و بعد از نوشتن معادله، طرفین معادله را در ۶۰ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = x - 26 \xrightarrow{\times 60} 12x + 15x + 20x = 60x - 26 \times 60$$

$$\Rightarrow 47x = 60x - 26 \times 60 \Rightarrow 13x = 26 \times 60 \Rightarrow x = 2 \times 60$$

$$\Rightarrow x = 120$$

ابتدا حاصل هر یک از کفه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{چپ سمت چپ: } 3x + 2 + 2x - 1 + x + x + x + 19 = 8x + 20$$

$$\text{کفه سمت راست: } 4x + 3x + 3x + 2x + 4 = 12x + 4$$

$$(\text{کفه سمت راست}) = 2 \Rightarrow$$

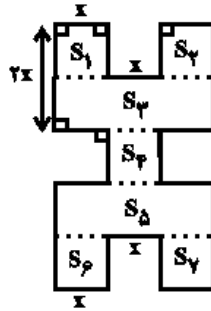
$$8x + 20 = 2(12x + 4) \Rightarrow 8x + 20 = 24x + 8$$

$$\Rightarrow 24x - 8x = 20 - 8 \Rightarrow 16x = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\text{حاصل کفه سمت راست} = 12x + 4 \xrightarrow{x = \frac{3}{4}} 12 \times \frac{3}{4} + 4 = 9 + 4 = 13$$

با توجه به شکل زیر ابتدا محیط و مساحت شکل را جداگانه بدست می‌آوریم:



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = x^2$$

$$S_6 = S_7 = x \times 3x = 3x^2$$

$$\text{مساحت کل شکل} = 5S_1 + 2S_6 = 5x^2 + 2 \times 3x^2 = 11x^2$$

$$\text{محیط شکل} = 2(x + x + x + x + x + 2x + x + x + x + 2x)$$

$$\text{محیط شکل} = 2 \times 12x = 24x$$

$$\text{محیط شکل} = \text{مساحت شکل} \Rightarrow 24x = 11x^2 \xrightarrow{x \neq 0} x = \frac{24}{11}$$

$$2 \times \frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{2}x - 1 \xrightarrow{\times 6} 4x + 30 = 3x - 6$$

$$\Rightarrow 4x - 3x = -6 - 30$$

$$\Rightarrow x = -36$$

سن فعلی حمید را x و سن فعلی خواهرش را y فرض می‌کنیم. داریم:

$$x = \mathfrak{V}y - \mathfrak{F} \quad (1)$$

دیگر سال: $(y + 5) = 0.8(x + 5) \Rightarrow y + 5 = 0.8x + 4$

$$\Rightarrow y = \circ/\lambda x - 1 \quad (v)$$

مقدار y از معادله (۲) را در (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$x = \mathfrak{Y}(\circ/\wedge x - 1) - \mathfrak{F} \Rightarrow x = 1/\mathfrak{F}x - \mathfrak{Y} - \mathfrak{F}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{f} = \circ / \mathfrak{f} x \Rightarrow x = \frac{\mathfrak{f}}{\circ / \mathfrak{f}} = \mathfrak{I} \circ \xrightarrow{(1)} y = \mathfrak{V}$$

$$\Rightarrow x + y = 10 + 4 = 14$$

حاصل طرف چپ ترازو برابر است با:

$$\forall x + x + \Delta x + \Delta = \Lambda x + \Delta$$

$$\mathbb{F}x + \mathbb{F}\omega$$

حاصل طرف راست ترازو برابر است با:

$$\Rightarrow \lambda x + \delta = \mathbb{F}x + \mathbb{Y}\delta \Rightarrow \lambda x - \mathbb{F}x = \mathbb{Y}\delta - \delta$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}x = \gamma_0 \Rightarrow x = \frac{\gamma_0}{\mathbb{F}} = \omega$$

$$F \times \Delta + \gamma \Delta = \gamma_0 + \gamma \Delta = F \Delta$$

حال حاصل هر کفه برابر است با:

حقوق فن ورز را x میلیون تومان در نظر می گیریم؛ بنابراین:

$$\text{حقوق مهندس} = \frac{3}{2}x, \text{ حقوق مدير} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{2}x \Rightarrow \text{حقوق مدير} = \frac{9}{4}x$$

$$9x + 3 \times \frac{3}{2}x + 2 \times \frac{9}{4}x = 45$$

$$\Rightarrow 15x = 45 \Rightarrow x = 3 \text{ میلیون تومان}$$

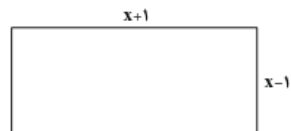
فرض می‌کنیم سن کنونی علی باشد، پس ۱۶ سال دیگر سن او $x - ۶$ می‌شود، در این صورت داریم:

$$x + 1\mathfrak{f} = \mathfrak{W}x - \mathfrak{f} \Rightarrow \mathfrak{W}x - x = 1\mathfrak{f} + \mathfrak{f}$$

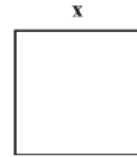
$$\Rightarrow \forall x = \forall \forall \Rightarrow x = 11$$

سن کنونی علی ۱۱ سال است، پس $۹ = ۱۱ - ۲۰$ سال دیگر سن او ۲۰ سال می‌شود.

ابتدا مساحت هر شکل را بر حسب x می‌یابیم:



$$\text{مساحت مستطیل} = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

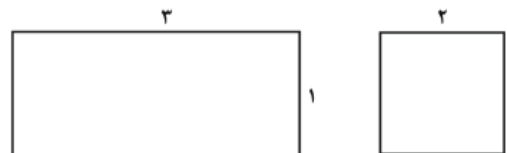


$$\text{مساحت مربع} = x^2$$

$$\text{مجموع مساحت شکل‌ها} = 7 \Rightarrow x^2 - 1 + x^2 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 7$$

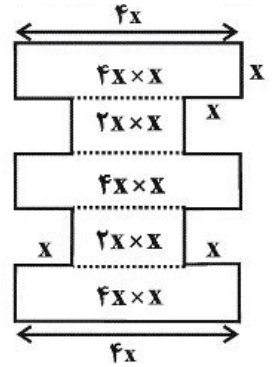
$$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

پس طول اضلاع شکل‌ها به صورت زیر است:



پس طول ضلع کوچکتر مستطیل برابر یک است.

ابتدا اندازه مساحت و محیط شکل را جداگانه می‌یابیم:



$$\text{مساحت شکل} = 4x \times x + 2x \times x + 4x \times x + 2x \times x = 16x^2$$

$$\text{مساحت شکل} = 4x^2 + 2x^2 + 4x^2 + 2x^2 = 16x^2$$

$$\text{محیط شکل} = 4x + 2x + 4x + 2x = 16x \Rightarrow \text{محیط شکل} = \text{مساحت شکل}$$

$$16x^2 = 16x$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 16x = 0$$

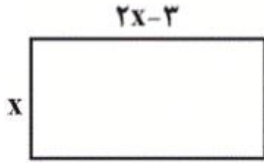
$$x(16x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 16x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{16} = 1 \end{cases}$$

تعداد دانش‌آموزان انسانی و ریاضی را در حالت اول x در نظر می‌گیریم. در این صورت، تعداد دانش‌آموزان تجربی $x+3$ خواهد شد. پس از تغییر رشته، تعداد دانش‌آموزان رشته انسان $x-3$ نفر خواهد شد.

$$x - 3 = \frac{1}{4}(\underbrace{x + x + x + 3}_{\text{کل دانش آموزان دهم}}) \Rightarrow 4x - 12 = x + 3 \Rightarrow x = 15$$

$$\text{تعداد دانش آموزان} : 3x + 3 = 3(15) + 3 = 48$$

با توجه به شکل زیر، فرض می‌کنیم عرض مستطیل x باشد، در این صورت طول مستطیل $2x - 3$ می‌باشد، در نتیجه داریم:



(عرض + طول) $\times 2$ = محیط مستطیل

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل} = 2(x + 2x - 3) = 2(3x - 3) = 6x - 6 \xrightarrow{\text{محیط مستطیل} = 54} 6x - 6 = 54$$

$$6x - 6 = 54 \Rightarrow 6x = 6 + 54 \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{6} = 10$$

پس طول مستطیل برابر است با:

$$\text{طول مستطیل} = 2x - 3 = 2 \times 10 - 3 = 20 - 3 = 17$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض} = 17 \times 10 = 170$$

با استفاده از روش ریشه‌گیری داریم:

$$16x^2 = (2x - 3)^2 \Rightarrow (4x)^2 = (2x - 3)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2x - 3 \Rightarrow 4x - 2x = -3 \Rightarrow 2x = -\frac{3}{2} \\ 4x = -(2x - 3) \Rightarrow 4x + 2x = 3 \Rightarrow 6x = 3 \end{cases}$$

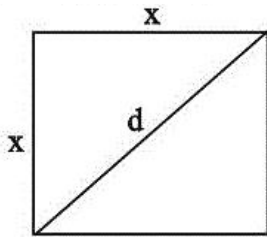
$$\Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

اگر معادله درجه دوم $a'x^2 + b'x + c' = 0$ یک ریشه مضاعف داشته باشد، آنگاه ریشه مضاعف از رابطه $x = \frac{-b'}{2a'}$ بدست می‌آید.

$$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = a \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{b'}{2a'} = \frac{-a}{2 \times 1} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

اگر طول ضلع مربع را x فرض کنیم در این صورت مساحت و محیط آن به صورت زیر به دست می آید:



$$\text{مساحت مربع} = x^2$$

$$\text{محیط مربع} = 4x$$

$$\text{مساحت مربع} - \text{محیط مربع} = 21 \Rightarrow x^2 - 4x = 21$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x^2 + (3 - 7)x + 3 \times (-7) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

طول قطر مربع از رابطه $x\sqrt{2}$ به دست می آید، داریم:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2} \xrightarrow{x=7} d = 7\sqrt{2}$$

$$3x^2 - 5x = -2$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{+\left(\frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{3}\right)\right)^2 = \frac{25}{36}} x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1 \\ x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x' = \frac{x''}{2}$$

$$x'^2 - 6ax + 11a = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{a'x'^2 + b'x + c' = 0} \begin{cases} a' = 1 \\ b' = -6a \\ c' = 11a \end{cases}$$

$$\text{ریشه‌ها حاصل جمع ریشه‌ها: } x' + x'' = \frac{-b'}{a'} = \frac{-(-6a)}{1} = 6a$$

$$\xrightarrow{x' = \frac{x''}{2}} \frac{x''}{2} + x'' = 6a \Rightarrow \frac{3x''}{2} = 6a \Rightarrow x'' = \frac{2 \times 6a}{3} = 4a \quad (1)$$

$$\text{ریشه‌ها حاصل ضرب ریشه‌ها: } x'x'' = \frac{c'}{a'} = \frac{11a}{1} \xrightarrow{x' = \frac{x''}{2}} \frac{x''}{2} \times x'' = 11a$$

$$\Rightarrow x''^2 = 2 \times 11a = 22a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} (4a)^2 = 22a \Rightarrow 16a^2 = 22a \Rightarrow 16a^2 - 22a = 0$$

$$\Rightarrow 16a(a - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 16a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x'^2 - 6(0)x + 11(0) = 0 \\ \Rightarrow x'^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{غ.ق.غ} \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x'^2 - 6(1)x + 11(1) = 0 \\ \Rightarrow x'^2 - 6x + 11 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x' = 4 \end{cases} \end{cases}$$

پس $a = 1$ قابل قبول است $x' = 2$

معادله را با استفاده از روش ریشه‌گیری حل می‌کنیم، داریم:

$$(y - 3x)^2 = 16 \Rightarrow (y - 3x) = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 3x = 4 \Rightarrow -3x = 4 - y \Rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-3} = 1 \\ y - 3x = -4 \Rightarrow -3x = -4 - y \Rightarrow -3x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{-3} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3}$$

$$(x - (-\frac{1}{y}))(x - 3) = 0$$

$$(x + \frac{1}{y})(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (\frac{1}{y} - 3)x - \frac{3}{y} = 0$$

$$\xrightarrow{\times y} yx^2 - 5x - 3 = 0$$

اگر این معادله را در هر عدد حقیقی بجز صفر ضرب کنیم معادله جدید با همان جواب‌ها است پس معادله منحصر به فرد نیست.

(الف)

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 9x = 6 &\Rightarrow \frac{3x^2}{3} - \frac{9x}{3} = \frac{6}{3} \\
 x^2 - 3x = \frac{6}{3} &\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{6}{3} + \frac{9}{4} \\
 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{63}{12} &\Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{63}{12}} \\
 x - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{63}{12}} &\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{12}}, \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{12}}
 \end{aligned}$$

ب) می‌توانیم برای راحتی کار $x - 1$ را برابر t در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned}
 t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 &= 0 \\
 \Delta = (2\sqrt{3})^2 + 4 \times 6 &= 12 + 24 = 36 \\
 t_1, t_2 = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2} &= \\
 t_1, t_2 = \frac{2(-\sqrt{3} \pm 3)}{2} &\Rightarrow \begin{cases} t_1 = x_1 - 1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} + 3 + 1 \\ t_2 = x_2 - 1 = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3} - 3 + 1 \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} + 4 \\ x_2 = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

معادله زمانی دارای ریشه مضاعف است که $k - 2 = 0$ باشد، لذا $k = 2$ است.

الف) معادله را با استفاده از روش ریشه گیری حل می کنیم:

$$(27x - 2)^2 = (13x + 22)^2 \Rightarrow 27x - 2 = \pm(13x + 22)$$

$$\begin{cases} 27x - 2 = 13x + 22 \Rightarrow 27x - 13x = 2 + 22 \Rightarrow 14x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \\ 27x - 2 = -(13x + 22) \Rightarrow 27x - 2 = -13x - 22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 27x + 13x = 2 - 22 \Rightarrow 40x = -20 \Rightarrow x = -\frac{20}{40} = -\frac{1}{2}$$

ب) ابتدا عدد ثابت را به طرف راست تساوی می بریم سپس طرفین معادله را به ضریب x^2 ساده می کنیم:

$$2x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x = 12 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x = 6$$

۱) حال مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{5}{2})^2 = (\frac{1}{2} \times \frac{5}{2})^2$ را به طرفین معادله اضافه می کنیم.

۲) از عدد $\frac{121}{16}$ جذر گرفته می شود.

۳)

$$x^2 + \frac{5}{2}x + (\frac{5}{2})^2 = 6 + (\frac{5}{2})^2$$

$$\Rightarrow (x + \frac{5}{2})^2 = 6 + \frac{25}{4} \Rightarrow (x + \frac{5}{2})^2 = \frac{121}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x + \frac{5}{2} = \pm \frac{11}{2}}_{\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} \\ x = -\frac{11}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{16}{2} = -8 \end{cases}}$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \xrightarrow[\text{در}]{\text{ضرب طرفین}} -2x^2 + 4x + 30 = 0$$

برای حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow \text{عدد ثابت را به طرف راست تساوی می‌بریم.}$$

$$2x^2 - 4x - 1 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را بر ضریب } x^2} 2x^2 - 4x - 1 \rightarrow \text{تقسیم می‌کنیم تا ضریب } x^2 \text{ یک شود.}$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{4x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{مربع نصف ضریب } x \text{ را به طرفین} \\ \text{معادله اضافه می‌کنیم. } \left(\frac{1}{2} \times (-2)\right)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1 \xrightarrow{\text{حال طرف چپ تساوی را به صورت مربع دو جمله ای می‌نویسیم.}} (x-1)^2 = \frac{3}{2}$$

که با مقایسه با عبارت صورت سؤال $(x-a)^2 = b$ ، داریم:

$$\begin{cases} (x-a)^2 = b \\ (x-1)^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a-b = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 8x + \frac{15}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2 + 16x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2x)^2 + 8(2x) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+3)(2x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ جواب بزرگتر} \\ 2x+5=0 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x = -3 \text{ جواب کوچکتر} \\ x-1=0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} - (-3) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

ابتدا مساحت هر کدام از قسمت‌های رنگی را به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}t \times \sqrt{2}t = t^2$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 2t^2$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} = t^2$$

مساحت قسمت‌های رنگی - مساحت مربع بزرگ = مساحت قسمت باقی‌مانده

$$\Rightarrow 24 = 36 - (t^2 + 2t^2 + t^2) \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3}$$

الف) برای به دست آوردن مجموع و حاصل ضرب ریشه ها داریم:

$$3x^2 - 5x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه ها} = \frac{c}{a} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

ب)

۱) اگر $x = 2$ یکی از ریشه های معادله باشد، ریشه معادله در خود معادله صدق می کند، لذا داریم:

$$3x^2 + 4x - b = 0 \xrightarrow{x=2} 3 \times (2)^2 + 4 \times (2) - b = 0 \\ \Rightarrow 12 + 8 - b = 0 \Rightarrow b = 20$$

۲) ریشه دیگر این معادله با استفاده از رابطه مجموع ریشه ها به دست می آید:

$$3x^2 + 4x - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 4 \\ c' = -20 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه ها} = -\frac{b'}{a'} \Rightarrow 2 + x' = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x' = -\frac{4}{3} - 2 = -\frac{10}{3}$$

چون مجموع ضرایب معادله صفر است $(35 - 150 + 115 = 0)$ ، پس یکی از ریشه های معادله $x = 1$ و ریشه دیگر آن $\frac{c}{a} = \frac{115}{35} = \frac{23}{7}$ می باشد، پس اختلاف ریشه ها برابر است با:

$$\text{اختلاف ریشه ها} = \frac{23}{7} - 1 = \frac{16}{7}$$

برای داشتن ریشه مضاعف، معادله داده شده، باید به صورت $(x+2)^2 = 0$ باشد. پس:

$$k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = k+1 \xrightarrow{k=3} (x-1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

(الف)

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 1 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

(ب)

عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل

$$\Rightarrow (x+1)(x+3) = 15$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 15 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 2 \\ \text{غ ق } x = -6 \end{cases}$$

مبین معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ بدست می‌آید، داریم:

$$3x^2 + 4x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = (4)^2 - 4 \times (3) \times (6) = 16 - 72 = -56$$

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد، در این صورت ریشه‌های این معادله $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$ خواهند بود.

$$15x^2 + 28x + 13 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = 15 \\ b = 28 \\ c = 13 \end{cases}$$

$$a + c = b \Rightarrow 15 + 13 = 28$$

پس یکی از ریشه‌ها $x = -1$ و ریشه دیگر $x = -\frac{13}{15}$ است. یعنی اختلاف ریشه‌ها برابر است با:

$$\left| -1 - \left(-\frac{13}{15} \right) \right| = \left| -1 + \frac{13}{15} \right| = \left| -\frac{15}{15} + \frac{13}{15} \right| = \left| -\frac{2}{15} \right| = \frac{2}{15}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۱

ابتدا مقادیر $f(2)$ و $f(2 + \sqrt{7})$ را می یابیم:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

$$f(2 + \sqrt{7}) = \sqrt{-(2 + \sqrt{7})^2 + 4(2 + \sqrt{7}) + 12}$$

$$= \sqrt{-(4 + 4\sqrt{7} + 7) + 8 + 4\sqrt{7} + 12}$$

$$= \sqrt{-4 - 4\sqrt{7} - 7 + 8 + 4\sqrt{7} + 12} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(2) = \sqrt{-2^2 - 4 \times 2 + 12} = \sqrt{-4 + 8 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{7}) - f(2) = 3 - 4 = -1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۲

$$\frac{2x-1}{1} + \frac{1}{2x+1} = 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(2x-1)(2x+1)+1}{2x+1} = 2x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{4x^2-1+1}{2x+1} = 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4x^2}{2x+1} = 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 = (2x+1)(2x - \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 4x^2 - x + 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۳

ابتدا معادله را با استفاده از روش اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم. دقت کنید که چون ضریب x^2 مربع کامل است، پس $3x$ را به عنوان جمله مشترک در نظر می گیریم:

$$9x^2 - 9x - 10 = 0 \Rightarrow (3x)^2 - 3 \times (3x) - 10 = 0$$

$$(3x)^2 + (2 - 5) \times (3x) + (2) \times (-5) = 0$$

$$\Rightarrow (3x+2)(3x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} & \text{ریشه کوچکتر} \\ 3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3} & \text{ریشه بزرگتر} \end{cases}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۴۴

$$x=1 \Rightarrow \frac{(1)^2-1}{1+12} = \frac{1-3}{1+4} + \frac{b(1)^2}{1+3} \Rightarrow \frac{-7}{13} = \frac{-2}{5} + \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{7}{13} = \frac{b}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-35+26}{65} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{-9}{65} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = \frac{-36}{65}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۴۵

جواب معادله در خود معادله صدق می کند، داریم:

$$\frac{a+3}{2 \times 3 + 3} = \frac{3+1}{3} \Rightarrow \frac{a+3}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow a+3 = 9 \times \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a+3=12 \Rightarrow a=9$$

اگر علی طول استخر را در x ثانیه شنا کند، امیر در $x - ۲۰$ ثانیه شنا می‌کند. یعنی علی در یک ثانیه $\frac{1}{x}$ و امیر در یک ثانیه $\frac{1}{x - ۲۰}$ طول استخر را شنا می‌کنند و هنگامی که از دو طرف به سمت یکدیگر شنا می‌کنند در هر ثانیه $\frac{1}{۳۴}$ طول استخر را شنا می‌کنند:

$$\frac{۴۰}{x} + \frac{۴۰}{x - ۲۰} = \frac{۴۰}{۲۴} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x - ۲۰} - \frac{1}{۲۴} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴(x - ۲۰)}{۲۴x(x - ۲۰)} + \frac{۲۴x}{۲۴x(x - ۲۰)} - \frac{x(x - ۲۰)}{۲۴x(x - ۲۰)} = ۰ \Rightarrow \frac{-x^2 + ۶۸x - ۴۸۰}{۲۴x(x - ۲۰)} = ۰$$

$$\Rightarrow -x^2 + ۶۸x - ۴۸۰ = ۰$$

$$\Rightarrow x^2 - ۶۸x + ۴۸۰ = ۰ \xrightarrow{\text{معادله را به روش تجزیه حل میکنیم}}$$

$$(x - ۴۰)(x - ۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۴۰ = ۰ \Rightarrow x = ۴۰ \\ x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱۲ \end{cases}$$

جواب $x = ۱۲$ غیرقابل قبول است چون در این صورت زمان شنای امیر کمتر از صفر است.

علی طول ۴۰ متری را در ۶۰ ثانیه شنا می‌کند. پس سرعت او $\frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$ متر بر ثانیه است.

ابتدا طرف چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱۰}{x - ۳} - \frac{۵x - ۵}{x - ۳} = ۲$$

$$\frac{۱۰ - ۵x + ۵}{x - ۳} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۵ - ۵x}{x - ۳} = ۲$$

$$\Rightarrow ۱۵ - ۵x = ۲(x - ۳) \Rightarrow ۱۵ - ۵x = ۲x - ۶$$

$$\Rightarrow -۵x - ۲x = -۱۵ - ۶$$

$$\Rightarrow -۷x = -۲۱ \Rightarrow x = \frac{-۲۱}{-۷} = ۳ \quad \text{غ ق ق}$$

دقت کنید که $x = ۳$ جواب قابل قبول معادله نمی‌باشد، زیرا ریشه مخرج کسرهای سمت چپ معادله گویا می‌باشد.

با طرفین وسطین کردن معادله صورت سؤال داریم:

$$\frac{x+۱}{x-۲} = \frac{x-۵}{x+۶} \Rightarrow (x+۱)(x+۶) = (x-۵)(x-۲)$$

$$\Rightarrow x^2 + ۷x + ۶ = x^2 - ۷x + ۱۰$$

$$\Rightarrow x^2 + ۷x + ۶ - x^2 - ۷x - ۱۰ = ۰$$

$$۱۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۱۴} \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۹

کافی است برای حل معادله طرفین وسطین کنیم، داریم:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow (x-2)(x+2) = (x+1)(x-3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

جواب به دست آمده در معادله صدق می‌کند.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۰

فرض می‌کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُر کند پس در یک ساعت شیر B ، $\frac{V}{x}$ حجم استخر را پُر می‌کند و با همین استدلال شیر A در یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ حجم استخر را پُر می‌کند، حال هنگامی که دو شیر با هم باز باشند در یک ساعت $\frac{V}{12}$ حجم استخر پُر می‌شود در نتیجه:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{x-10}{x(x-10)} + \frac{x}{x(x-10)} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-10}{x(x-10)} = \frac{1}{12} \Rightarrow x(x-10) = 12(2x-10)$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x = 24x - 120 \Rightarrow x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=30 \text{ ق} \\ x=4 \text{ غ} \end{cases}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۱

طبق صورت سؤال، داریم:

$$3x - \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 3x - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{2}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x \times x - 2}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۲

جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا داریم:

$$\frac{x-a}{x-4} + \frac{8}{x^2} = -6 \xrightarrow{x=2}$$

$$\frac{2-a}{2-4} + \frac{8}{(2)^2} = -6 \Rightarrow \frac{2-a}{-2} + 2 = -6$$

$$\Rightarrow \frac{2-a}{-2} = -6-2 \Rightarrow \frac{2-a}{-2} = -8$$

$$\Rightarrow 2-a = 16 \Rightarrow a = 2-16 = -14$$

فرض می‌کنیم شیر B به تنهایی استخر را در x ساعت پر می‌کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پر می‌شود و به همین ترتیب اگر فقط شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-6}$ استخر پر می‌شود، حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{V}{x} + \frac{V}{x-6} &= \frac{V}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{4} &= 0 \Rightarrow \frac{4(x-6)}{4x(x-6)} + \frac{4x}{4x(x-6)} - \frac{x(x-6)}{4x(x-6)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{4x-24+4x-x(x-6)}{4x(x-6)} &= 0 \Rightarrow 4x-24+4x-x^2+6x = 0 \\ \Rightarrow x^2-14x+24 &= 0 \Rightarrow (x-2)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ق غ} \\ x=12 \text{ ق ق} \end{cases}\end{aligned}$$

دقت کنید که $x=2$ قابل قبول نیست، زیرا در این صورت مدت زمان پر شدن استخر توسط شیر A مقداری منفی می‌شود که نادرست است.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2+6=13x \Rightarrow 6x^2-13x+6=0$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(6 \times 6) = 169 - 144 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13+5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{13-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{9-4}{6} \right| = \frac{5}{6}$$

اگر فرض کنیم x روز طول بکشد تا کارگر دوم به تنهایی کار را تمام کند در این صورت کارگر اول به تنهایی کار را در $(x-10)$ روز تمام می‌کند. لذا می‌توان گفت کارگر اول در یک روز $\frac{1}{x-10}$ کل کار و کارگر دوم در یک روز $\frac{1}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{x-10+x}{x(x-10)} = \frac{1}{12}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 34x + 120 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله ی مشترک}} (x-30)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-30=0 \Rightarrow x=30 \text{ ق ق} \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \text{ ق غ} \end{cases}$$

الف) معادله را با استفاده از طرفین وسطین کردن، حل می کنیم:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-5}{x+6} \Rightarrow (x+3)(x+6) = (x-5)(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 = x^2 - 7x + 10 \Rightarrow 9x + 7x = 10 - 18$$

$$\Rightarrow 16x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

ب) جواب معادله در خود معادله صدق می کند، داریم:

$$\frac{x+1}{x-5} + \frac{ax+3}{9x+2} = 6 \xrightarrow{x=2} \frac{2+1}{2-5} + \frac{2a+3}{9 \times 2 + 2} = 6$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{2a+3}{20} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{2a+3}{20} = 7 \Rightarrow 2a+3 = 140$$

$$\Rightarrow 2a = 140 - 3 \Rightarrow 2a = 137 \Rightarrow a = \frac{137}{2}$$

$$\frac{3}{x} = 2 - \frac{F}{x^2} \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین معادله را در } x^2 \neq 0} x^2 \left(\frac{3}{x} \right) = x^2 \left(2 - \frac{F}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow 3x = 2x^2 - F \Rightarrow 2x^2 - 3x - F = 0$$

$$\xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2+bx+c=0} \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=-F \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (2) \times (-F) = 9 + 8F = 41$$

چون $\Delta > 0$ است، پس معادله دارای دو ریشه می باشد و از طرفی $x = 0$ ریشه ی معادله نمی باشد. پس هر دو ریشه قابل قبول اند، پس مجموع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ می باشد، داریم:

$$\text{مجموع ریشه ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

برای حل معادله گویا، ابتدا عبارت $\frac{2}{x-1}$ را به طرف چپ تساوی می بریم:

$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{x-3-2}{x-1} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{x-5}{x-1} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda x - 40 = x - 1 \Rightarrow \lambda x - x = 40 - 1 \Rightarrow 7x = 39 \Rightarrow x = \frac{39}{7}$$

اگر زمان مربوط به چاپگر قدیمی‌تر را x فرض کنیم زمان مربوط به چاپگر جدید $(x - 1)$ خواهد بود، حالا با توجه به اطلاعات مساله خواهیم نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{x-1+x}{x(x-1)} = \frac{5}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5x(x-1) = 6(2x-1) \Rightarrow 5x^2 - 5x = 12x - 6$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 17x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{حل به هر روش دلخواه}} \begin{cases} x = 3 & \text{ق ق} \\ x = \frac{2}{5} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس زمان مربوط به چاپگر جدیدتر بر حسب ساعت برابر است با:

$$x - 1 = 3 - 1 = 2$$

جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، داریم:

$$x = 3 \Rightarrow \frac{a+3}{2 \times 3 + 3} = \frac{3+1}{3} \Rightarrow \frac{a+3}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a+3 = 9 \times \frac{4}{3} \Rightarrow a+3 = \frac{36}{3} \Rightarrow a+3 = 12$$

$$\Rightarrow a = 12 - 3 = 9 \Rightarrow a = 9$$